
DANISH
TECHNOLOGICAL
INSTITUTE
it's all about innovation


DANISH
TECHNOLOGICAL
INSTITUTE
Måleusikkerhed
FVM temadag, 1. oktober 2015, Hotel Koldingfjord

Baggrund

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

- Teknologisk Institut
  - Selvejende, almennyttigt, non-profit GTS-institut
  - 1000+ medarbejdere fordelt på MANGE forskellige områder
  - Kalibrering, ca. 15 personer, lokaliseret i Aarhus (pånær Måling og Kvalitet)
- Morten K. Rasmussen
  - Baggrund som fysiker
  - Ansat siden 2012 i sektion for kalibrering
  - Arbejder til dagligt med måleusikkerhed
    - Support af kalibreringslaboratorierne – usikkerhedsbudgetter, kalibreringssoftware, laboratorie-udvikling mm.
  - Deltager i EU og nationale metrologi-projekter (herudover F&U-projekter indenfor energi, klima, og måleteknik)
  - Rådgivning indenfor akkreditering, usikkerhedsberegning og måleteknik
  - Undervisning i usikkerhedsberegning og forskellige måletekniske områder

Fundamental metrologi hos TI

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

Installation & Kalibrering
Centerchef - Kaj Bryder

Kalibrering – 3 sektioner.

FLOW Anders Koustrup Niemann	**TEM** Dennis Dam Sørensen	**MET** Jan NIelsen
Flow, vand og energi MI	**Temperatur** MI	**F&U (EU & national)**
Anemometri og luftflow MI	**Elektriske parametre / tid / frek.**	**Intern support**
	Masse og Tryk	**Rådgivning**
	Luftfugtighed, fugtindhold og CO_2	**Undervisning**
	Kraft	

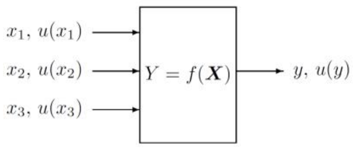
Måling & Kvalitet
Centerchef Niels Thestrup Jensen

Geometrisk (Måling & Kvalitet) MI

Estimering af måleusikkerhed

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

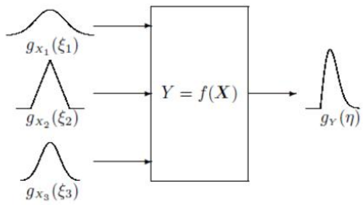
- GUM / EA 4-02 / DANAK AB11 mm. →
Propagering af usikkerheder, lineær model



Propagering af usikkerheder

- GUM supplement 1 →
Propagering af fordelinger, Monte Carlo-metode
mere valid metode

- Men endnu mere vigtigt
  - Hvilke usikkerhedsbidrag skal inkluderes i usikkerhedsbudgettet?
  - Erfaring og viden omkring måleprocessen
  - Inspiration kan hentes fra diverse guidelines fx EURAMET eller FVM

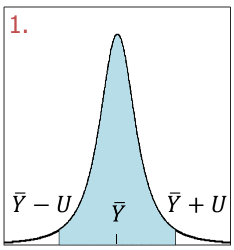


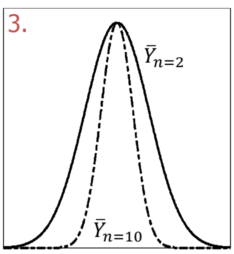
Propagering af fordelinger

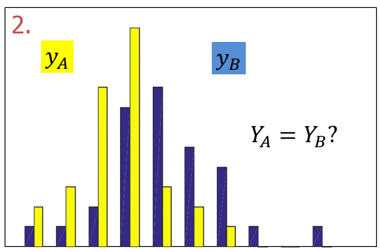
Anvendelse af måleusikkerheden

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

1. Hvor sikker er man på instrumentets visning?
2. Hvornår er to målinger forskellige?
3. Hvor mange målinger skal der foretages, hvad er den nødvendige stikprøve-størrelse



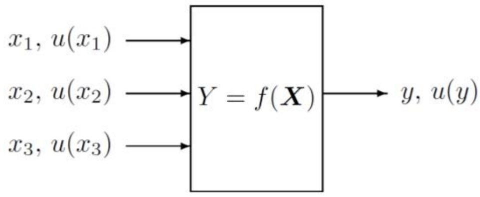




Beregning af måleusikkerhed

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

- **Modellering**
  - Matematisk model, f,som beskriver målestørrelsen vha. et antal input-parametre X_i
- **Usikkerhedsbidrag**
  - Estimer standardusikkerheden, $u(x_i)$, for alle input-parametre
- **Den kombinerede standardusikkerhed**
  - Standardusikkerhederne for alle input-parametre kombineres til en samlet standardusikkerhed, $u(y)$, for målestørrelsen Y
- **Den ekspanderede usikkerhed**
  - Den kombinerede standardusikkerhed ekspanderes til det ønskede konfidensniveau



Usikkerhedsbudgettet

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

Størrelse	Estimat	Standard-usikkerhed	Følsomhedskoefficient	Bidrag
X_1	x_1	$u(x_1)$	$c_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right\|_{x_1,x_2,\ldots,x_n}$	$u_1(y) = c_1 * u(x_1)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	c_2	$u_2(y)$
X_3	x_3	$u(x_3)$	c_3	$u_3(y)$
…	…	…	…	…
X_n	x_n	$u(x_n)$	c_n	$u_n(y)$
Y	y	–	Kombineret standard-usikkerhed	$u_c(y) = \sqrt{\sum_i^n u_i^2(y)}$
–	–	–	Ekspanderet usikkerhed	$U(y) = k * u_c(y)$

Modellering og identificering af usikkerhedskomponenter

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

1. Formulér sammenhængen mellem de forskellige input størrelser X_1, X_2, …, X_n og output størrelsen (måleresultatet) Y

   Dvs. $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$

2. Brainstorm! Hvilket parametre har indflydelse på måleresultater? Lav en liste over alle usikkerhedskilder…

   referenceudstyr (korrektion + usikkerhed + drift), aflæsningsusikkerhed, repeterbarhed, omgivelser (især temperaturen) …

3. Estimér/evaluér værdien af hvert usikkerhedsbidrag

   kun de største komponenter bidrager, i praksis, til den samelde usikkerhed, dvs. nogle komponenter kan evt. udelades

4. Beslut, hvad der skal stilles op med de enkelte usikkerhedsbidrag (eksperiementel/praktisk korrektion?)

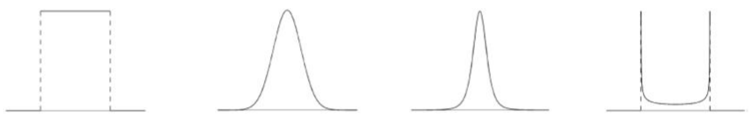
Usikkerhedsbudgettet

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

Størrelse	Estimat	Standard-usikkerhed	Følsomhedskoefficient	Bidrag
X_1	x_1	$u(x_1)$	$c_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right\|_{x_1, x_2, \dots, x_n}$	$u_1(y) = c_1 * u(x_1)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	c_2	$u_2(y)$
X_3	x_3	$u(x_3)$	c_3	$u_3(y)$
…	…	…	…	…
X_n	x_n	$u(x_n)$	c_n	$u_n(y)$
Y	y	–	Kombineret standard-usikkerhed	$u_c(y) = \sqrt{\sum_i^n u_i^2(y)}$
–	–	–	Ekspanderet usikkerhed	$U(y) = k * u_c(y)$

Evaluering af standardusikkerheden

- Type A-usikkerheder
  - Direkte bestemt ved gentagne målinger/observationer
  - Beskriver den usikkerhed som fremkommer pga. tilfældige variationer
  - $u(x) = s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$ *(evt. med faktor som tager højde for lille antal observationer)*
- Type B-usikkerheder
  - Indirekte bestemt
  - Fra kalibreringscertifikat, manual, specifikationsblad, erfaring …
  - Standardusikkerheden bestemmes vha. antagelse om den pågældende fordeling og dens parametre



Uniform — *Opløsning, tolerance…*
Normal — *Certifikat, eksperimentelle målinger…*
T
U — *Oscillerende signal*

Usikkerhedsbudgettet

Størrelse	Estimat	Standard-usikkerhed	Følsomhedskoefficient	Bidrag
X_1	x_1	$u(x_1)$	$c_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right\|_{x_1,x_2,\ldots,x_n}$	$u_1(y) = c_1 * u(x_1)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	c_2	$u_2(y)$
X_3	x_3	$u(x_3)$	c_3	$u_3(y)$
…	…	…	…	…
X_n	x_n	$u(x_n)$	c_n	$u_n(y)$
Y	y	–	Kombineret standard-usikkerhed	$u_c(y) = \sqrt{\sum_i^n u_i^2(y)}$
–	–	–	Ekspanderet usikkerhed	$U(y) = k * u_c(y)$

Kombineret standardusikkerhed

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

- Beregning af følsomhedskoefficienter
  - $c_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$
- Ukorrelerede inputparametre
  - $u(y)^2 = \sum c_i^2 \cdot u_i^2(x_i)$
- Korrelerede inputparametre
  - $u(y)^2 = \sum c_i^2 \cdot u_i^2(x_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} c_i * c_k * u(x_i, x_k)$
  - Indeholder ekstra led med elementerne fra kovarians-matricen
- Korrelerede inputparametre kan altså resultere i en større eller mindre usikkerhed afhængigt af de indbyrdes kovarianser

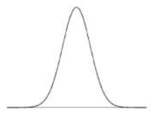
Usikkerhedsbudgettet

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

Størrelse	Estimat	Standard-usikkerhed	Følsomhedskoefficient	Bidrag
X_1	x_1	$u(x_1)$	$c_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right\|_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$	$u_1(y) = c_1 * u(x_1)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	c_2	$u_2(y)$
X_3	x_3	$u(x_3)$	c_3	$u_3(y)$
…	…	…	…	…
X_n	x_n	$u(x_n)$	c_n	$u_n(y)$
Y	y	–	Kombineret standard-usikkerhed	$u_c(y) = \sqrt{\sum_i^n u_i^2(y)}$
–	–	–	Ekspanderet usikkerhed	$U(y) = k * u_c(y)$

Ekspanderet usikkerhed

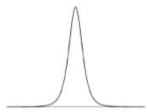
- Den ekspanderede usikkerhed, U, er standardusikkerheden multipliceret med en faktor, k, som sikrer et ønsket konfidensniveau (typisk 95,45 %)
  - $U = k \cdot u_c(y)$



Normal, $k_{95,45\,\%} = 2$

- Antages det at målestørrelsen er normalfordelt er $k = 2$

- Antages det at målestørrelsen er t-fordelt med ν_{eff} frihedsgrader anvendes $k = t_{95,45\%}(\nu_{\text{eff}})$
  - Med $\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$ (Welch-Satterthwaite formel)



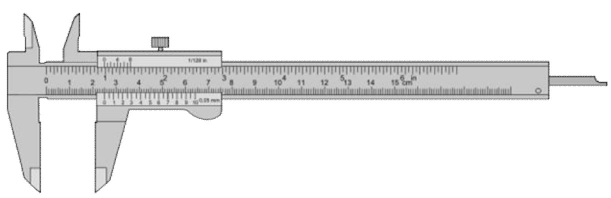
T, $k_{95,45\,\%} \geq 2$

ν_{eff}	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	50	∞
k	13,97	4,53	3,31	2,78	2,65	2,52	2,43	2,37	2,28	2,13	2,05	2,00

MS Excel: T.INV.2T(1-95,45;ν_{eff}*)*

Usikkerhedsberegning – skydelære

- EA. (1999). EA-4/02 - Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration - S10



Opstilling af modelligning

- $E_X = l_{iX} - l_S + L_S \cdot \bar{\alpha} \cdot \Delta t + \delta l_{iX} + \delta l_M$

  Hvor E_X betegner skydelærens fejlvisning

Input	forklaring
l_{iX}	Aflæsning af skydelære
l_S	Længde af måleblok
L_S	Nominel længde af måleblok
$\bar{\alpha}$	Gennemsnitlig termisk udvidelses-koefficient (skydelære+ måleblok)
Δt	Temperaturforskel mellem skydelære og måleblok
δl_{iX}	Korrektion associeret med skydelærens opløsning
δl_M	Korrektion forårsaget af mekaniske effekter

Opstilling af usikkerhedsbudget

- Estimat på inputparametre
- Standardusikkerhed på estimatet
  - Faktisk længde på måleblokken, l_s, er lig den nominelle værdi indenfor en tolerance med en halvbredde på $0{,}8\ \mu\text{m}$
  - Dvs, standardusikkerheden på l_s er $\frac{0{,}80\ \mu m}{\sqrt{3}} = 0{,}46\ \mu\text{m}$

Input X_i	Estimat x_i	Standardusikkerhed, $u(x_i)$	Fordeling	Følsomhedskoefficient, c_i	Usikkerheds bidrag, $u_i(y)$
l_{iX}	150,10 mm	-	-		
l_S	150,00 mm	0,46 µm	uniform		
Δt	0	1,15 K	uniform		
δl_{iX}	0	15 µm	uniform		
δl_M	0	29 µm	uniform		
$\boldsymbol{E_X}$	**0,10 mm**				

Følsomhedskoefficienter

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

- Vha. modelfunktionen beregnes følsomhedskoefficienterne c_i
- Disse anvendes sammen med standardusikkerhederne til at finde de enkelte usikkerhedsbidrag $u_i(y)$

Input X_i	Estimat x_i	Standardusikkerhed, $u(x_i)$	Fordeling	Følsomhedskoefficient, c_i	Usikkerheds bidrag, $u_i(y)$
l_{iX}	150,10 mm	-	-	-	-
l_S	150,00 mm	0,46 µm	uniform	-1	$-0{,}46$ µm
Δt	0	1,15 K	uniform	1,7 µm/K	2,0 µm
δl_{iX}	0	15 µm	uniform	1	15 µm
δl_M	0	29 µm	uniform	1	29 µm
$\boldsymbol{E_X}$	**0,10 mm**				

Kombinering af usikkerheder

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE

- Usikkerhedsbidragene kombineres under antagelse af at der ikke er indbyrdes korrelation
- Og den kombinerede standardusikkerhed for E_X findes
  - $u(E_X) = \sqrt{\sum c_i^2 u_i^2} = 33$ µm

Input X_i	Estimat x_i	Standardusikkerhed, $u(x_i)$	Fordeling	Følsomhedskoefficient, c_i	Usikkerheds bidrag, $u_i(y)$
l_{iX}	150,10 mm	-	-	-	-
l_S	150,00 mm	0,46 µm	uniform	-1	$-0{,}46$ µm
Δt	0	1,15 K	uniform	1,7 µm/K	2,0 µm
δl_{iX}	0	15 µm	uniform	1	15 µm
δl_M	0	29 µm	uniform	1	29 µm
$\boldsymbol{E_X}$	**0,10 mm**				**33 µm**

Ekspandering af usikkerhed

- Ekspandering af usikkerheden under antagelse af at E_X er normalfordelt ($k = 2$)
  - $E_X = 0{,}100 \text{ mm} \pm U = 0{,}100 \text{ mm} \pm k \cdot u(E_X) = 0{,}100\ mm \cdot \pm 66\ \mu m$

- Denne antagelse er ikke valid i dette tilfælde, idet alle inputparametrene er beskrevet hva. en uniform fordeling
  - Den resulterende fordeling af målestørrelsen er en trapez-funktion
  - Og et mere præcist estimat på usikkerheden er dermed: $U = 1{,}83 \cdot u(E_X) = 60\ \mu\text{m}$

Input X_i	Estimat x_i	Standardusikkerhed, $u(x_i)$	Fordeling	Følsomhedskoefficient, c_i	Usikkerheds bidrag, $u_i(y)$
l_{iX}	150,10 mm	-	-	-	-
l_S	150,00 mm	0,46 µm	uniform	-1	$-0{,}46$ µm
Δt	0	1,15 K	uniform	1,7 µm/K	2,0 µm
δl_{iX}	0	15 µm	uniform	1	15 µm
δl_M	0	29 µm	uniform	1	29 µm
$\boldsymbol{E_X}$	**0, 10 mm**				**33 µm**

Måleusikkerhed

- Spørgsmål?

- Kontakt
  - Morten K. Rasmussen, Teknologisk Institut, Sektion for Metrologi
  - mokr@teknologisk.dk | 7220 2679